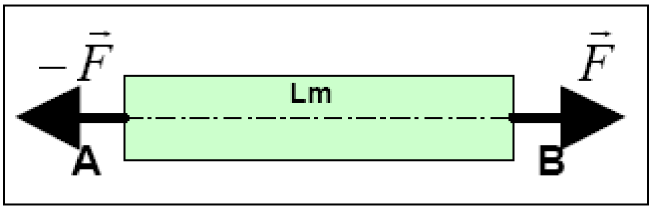
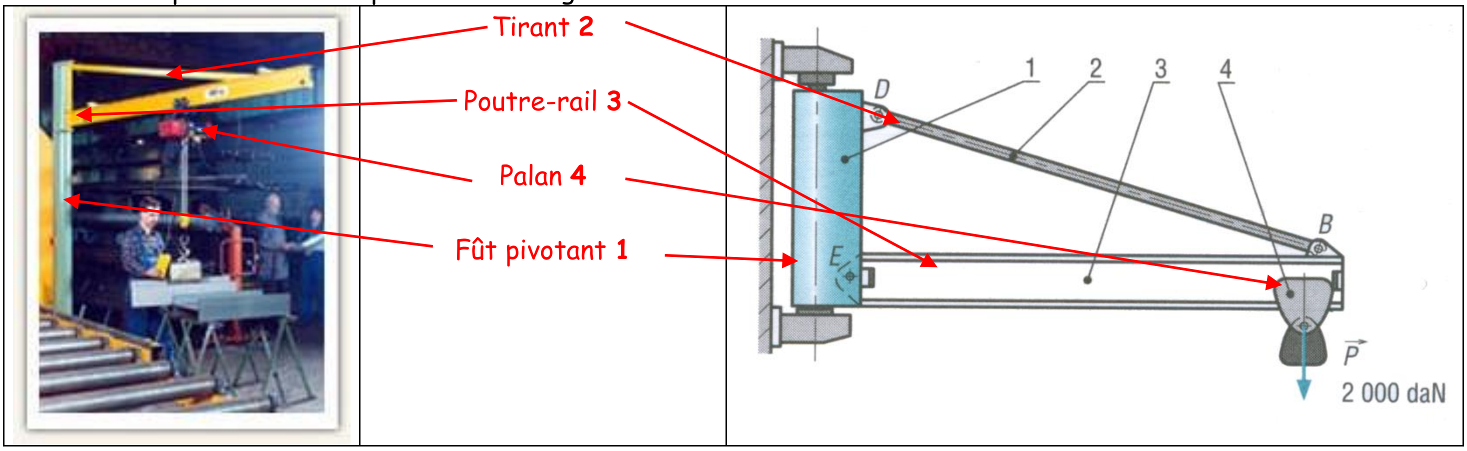
RdM : Traction Compression

Définition

Une poutre droite est sollicitée en traction chaque fois que les actions à ses extrémités (A et B) se réduisent à deux forces égales et opposées (F et $-F$), de direction la ligne moyenne (Lm).

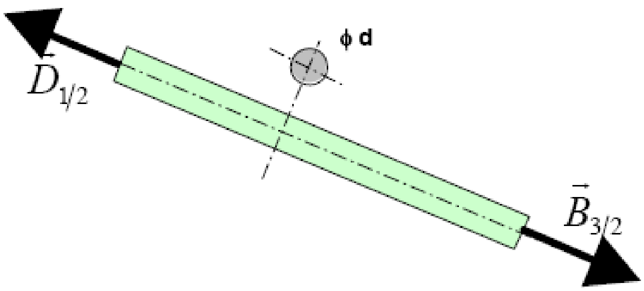


Exemple : les deux figures ci-dessous représentent une potence murale à flèche triangulée, utilisée en manutention pour lever et déplacer des charges.



Cette potence se compose d'un palan **4**, d'une poutre rail **3**, d'un fût pivotant **1** et d'un tirant **2**. Le tirant **2** est soumis à une sollicitation de traction : il est soumis à l'action des deux forces $\vec{\mathbf{B}}_{3/2}$ et $\vec{\mathbf{D}}_{2/1}$, égales et opposées, de direction BD, d'intensité maximale 6 200 N (intensité atteinte lorsque le palan est à l'extrême droite.

Le tirant **2** est cylindrique, de diamètre d inconnu, de longueur 2.8 m. Il est réalisé en acier (résistance à la rupture Rr = 500 MPa, limite élastique Re = 300 MPa). Le diamètre d va être
déterminé dans les paragraphes suivants.

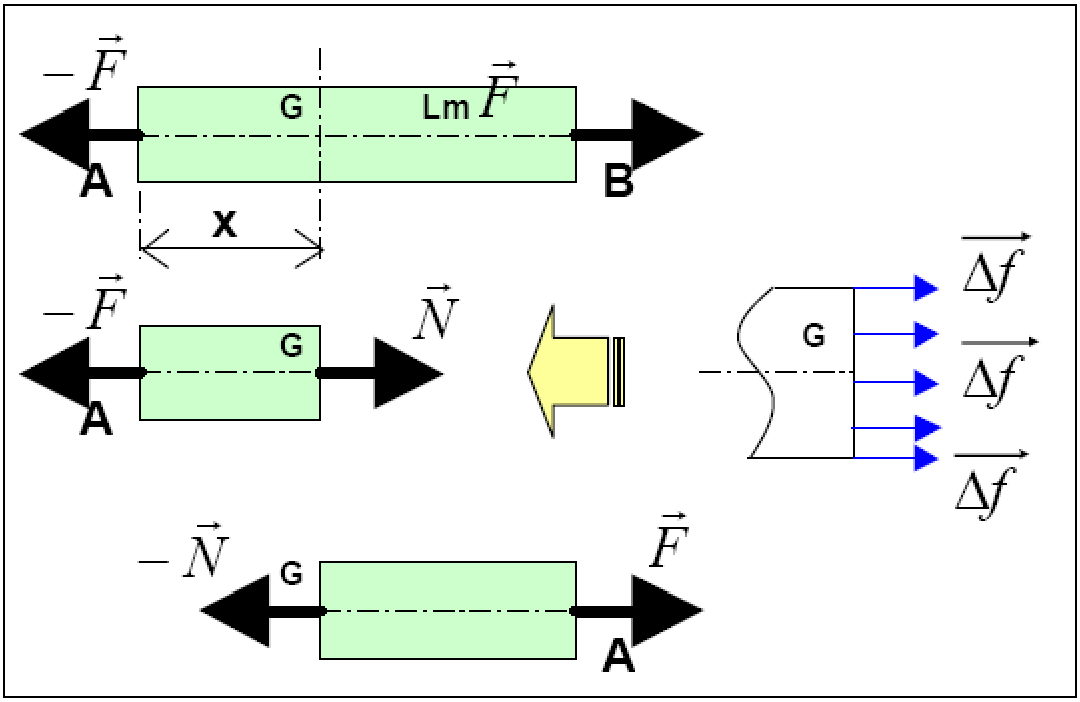


Effort normal N

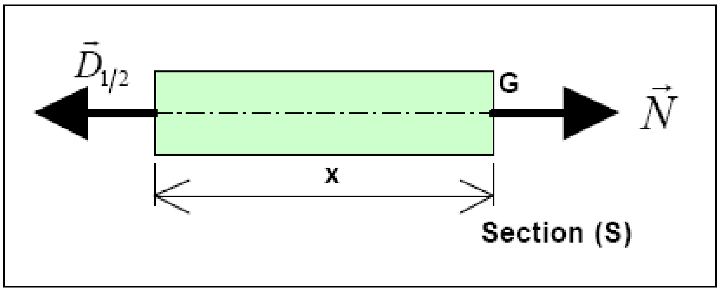
Faisons une coupure fictive dans la poutre précédente (section droite S, située à une distance x du point A) entre les deux extrémités A et B, de façon à faire apparaître les efforts intérieurs (efforts de cohésion) dans la poutre. Cette coupure S divise la poutre en deux tronçons AG et GB.

$$\{\tau_{coh)}\}_{G,R} = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{G,R}$$

Torseur des efforts de cohésions caractérisant une sollicitation de traction ou compression suivant le signe de N



Exemple : reprenons le cas du tirant.



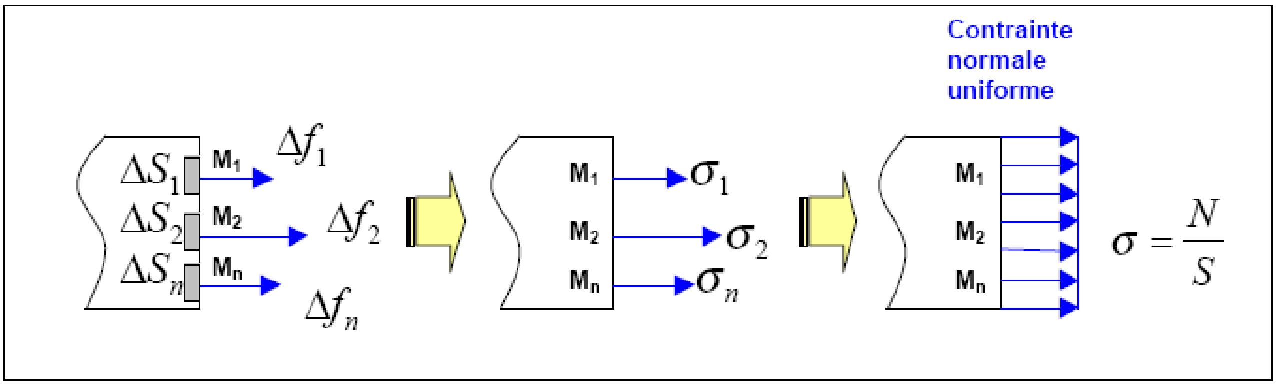
N = $D_{1/2}$ = $B_{3/2}$ = 6200 daN

Contrainte normale σ

Divisons la section S précédente en n petites surfaces élémentaires ΔS_1, ΔS_2, ..., ΔS_n telles que :

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \ldots + \Delta S_n$$

Chaque élément de surface supporte un effort de traction $\overrightarrow{\Delta f_1}$, $\overrightarrow{\Delta f_2}$, ..., $\overrightarrow{\Delta f_n}$ parallèle à la ligne moyenne AB.

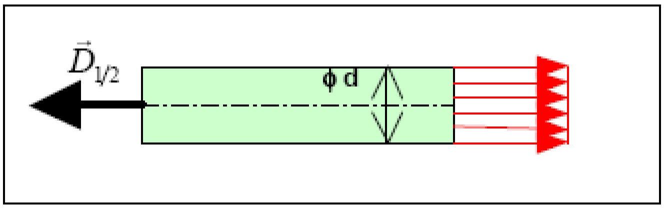


Contrainte normale uniforme : dans le cas général, et sauf cas particulier de concentrations de contraintes, on admettra que toutes les contraintes précédentes sont identiques. On dit qu'il y a répartition uniforme des contraintes dans la section droite S. Il en résulte que :

$$\sigma = \frac{N}{S}$$

avec σ la contrainte normale en Pa
N l'effort normal en N
S la section droite en m²

Exemple : reprenons le cas du tirant, en supposant d = 20 mm.



$D_{1/2}$ = 6200 daN

$$S = \frac{\pi \text{ x } 20^2}{4} = 314 \text{ mm}^2.$$

$$\sigma = \frac{N}{S} = = \frac{D_{1/2}}{S} = = \frac{62\ 000}{314} = 197 \text{ N.mm}^{-2}.$$

Condition de résistance

Pour des conditions de sécurité liées à l'usage de l'appareil, la contrainte σ précédemment déterminée doit rester inférieure à une contrainte limite admissible, appelée résistance pratique à l'extension Rpe.
La résistance pratique Rpe est fixée par des normes ou par le constructeur. Dans le cas général, Rpe est définie à partir de la limite élastique Re du matériau, déterminée par l'essai de traction.

$$\sigma_{Maxi} = \frac{N}{S} \leq Rpe = \frac{Re}{s}$$

avec s le coefficient de sécurité adopté pour la construction de l'appareil.
Exemple : reprenons le cas du tirant. Si on impose une contrainte admissible de 100 MPa, déterminons le diamètre d minimal pour la construction de celui-ci, ainsi que le coefficient de sécurité adopté. Rappel : effort N = 62 000 N.

- Détermination du diamètre d : 100 $\sigma_{Maxi} = \frac{N}{S} = \frac{62\ 000}{\frac{\pi\ d^2}{4}} \leq 100$ d'où $d \geq 28.1\ mm$

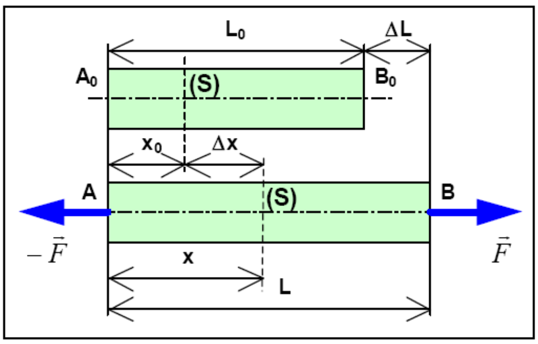
- Détermination du coefficient de sécurité : l'acier employé a pour caractéristiques Re = 300 MPa et Rr = 500 MPa.

$$Rpe = \frac{Re}{s} \quad \text{ou} \quad s = \frac{Re}{Rpe} = \frac{300}{100} = 3$$

DEFORMATIONS

Allongements

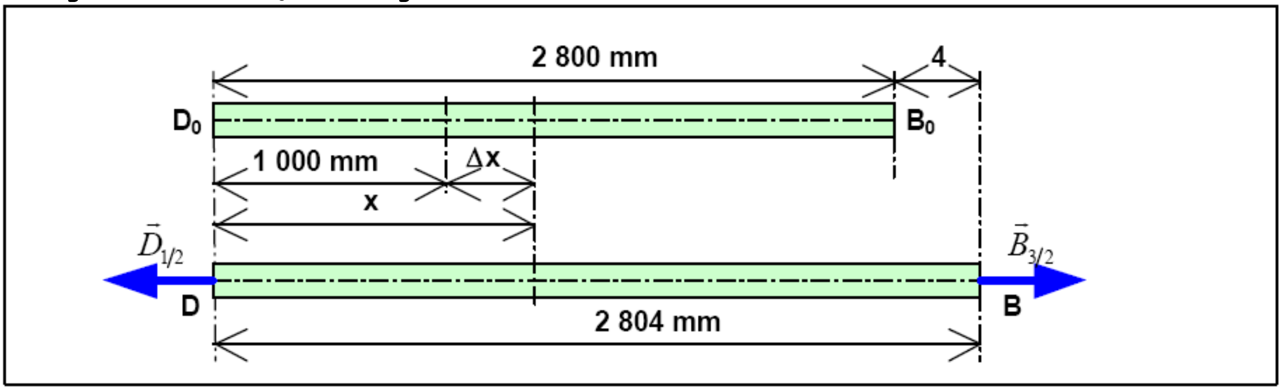
Lo : longueur initiale de la poutre
L : longueur finale de la poutre
ΔL : allongement total de la poutre
xo : longueur initiale du tronçon
x : longueur finale du tronçon
Δx : allongement du tronçon



L'expérimentation montre que les allongements sont proportionnels aux longueurs initiales. L'allongement relatif (déformation ε) traduit cette propriété :

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{\Delta x}{x_0}$$

Exemple : reprenons le cas du tirant. Sous charge, le tirant s'allonge de 4 mm. Déterminons la déformation ε et l'allongement d'un tronçon de longueur 1m.

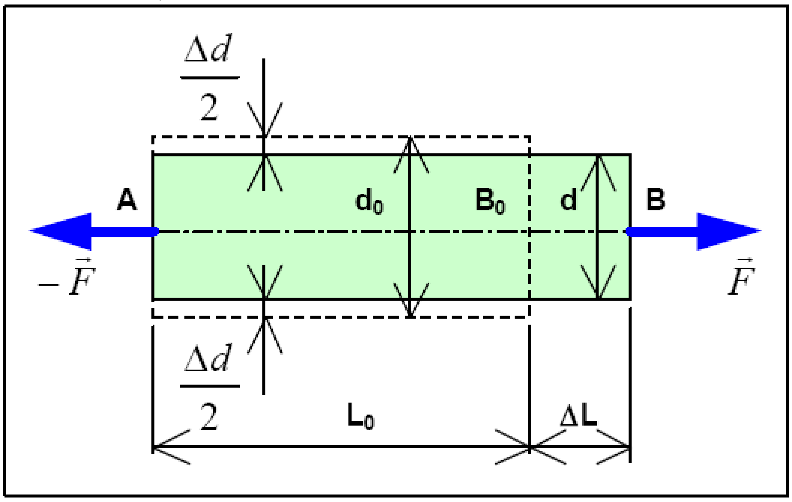


❖ Déformation ε : $\varepsilon = \dfrac{4}{2800} = 0{,}00143$.

❖ Allongement : $\varepsilon = \dfrac{\Delta x}{1000} = 00143$ d'où $\Delta x = 0{,}00143 \times 1000 = 1.43$ mm

Contraction latérale – Coefficient de Poisson ν

Le coefficient de Poisson ν caractérise le rapport entre la contraction latérale ε_d et l'allongement relatif de la poutre ε_L :



$$\varepsilon_d = \frac{\Delta d}{d_0} \quad \text{et} \quad \varepsilon_L = \frac{\Delta L}{L_0}$$

alors $\nu = -\dfrac{\varepsilon_d}{\varepsilon_L}$

Relation Contraintes - Déformations

Loi de Hooke

Pour un grand nombre de matériaux, l'essai de traction monte qu'il existe une zone élastique pour laquelle l'effort Ft de traction est proportionnel à l'allongement ΔL. Autrement dit, le rapport $L\ F\ \Delta$ est constant (analogie avec un ressort $F = \mathrm{K}x$).

Cette propriété est énoncée par la loi de Hooke : en déformation élastique, la contrainte normale σ est proportionnelle à l'allongement relatif ε :

$$\sigma = E.\ \varepsilon$$

avec σ la contrainte normale (en MPa)

ε l'allongement relatif (sans unité)

E le module d'élasticité longitudinale ou module d'Young (en MPa)

Remarques : le module d'élasticité longitudinale E est une caractéristique (propriété mécanique intrinsèque) du matériau. La loi de Hooke est à la RDM ce que la loi d'Ohm est à l'électricité.

Exemple : reprenons le cas du tirant. (d = 28 mm, σ = 100 MPa, E = 200 GPa, L = 2.8 m). Déterminons l'allongement du tirant :

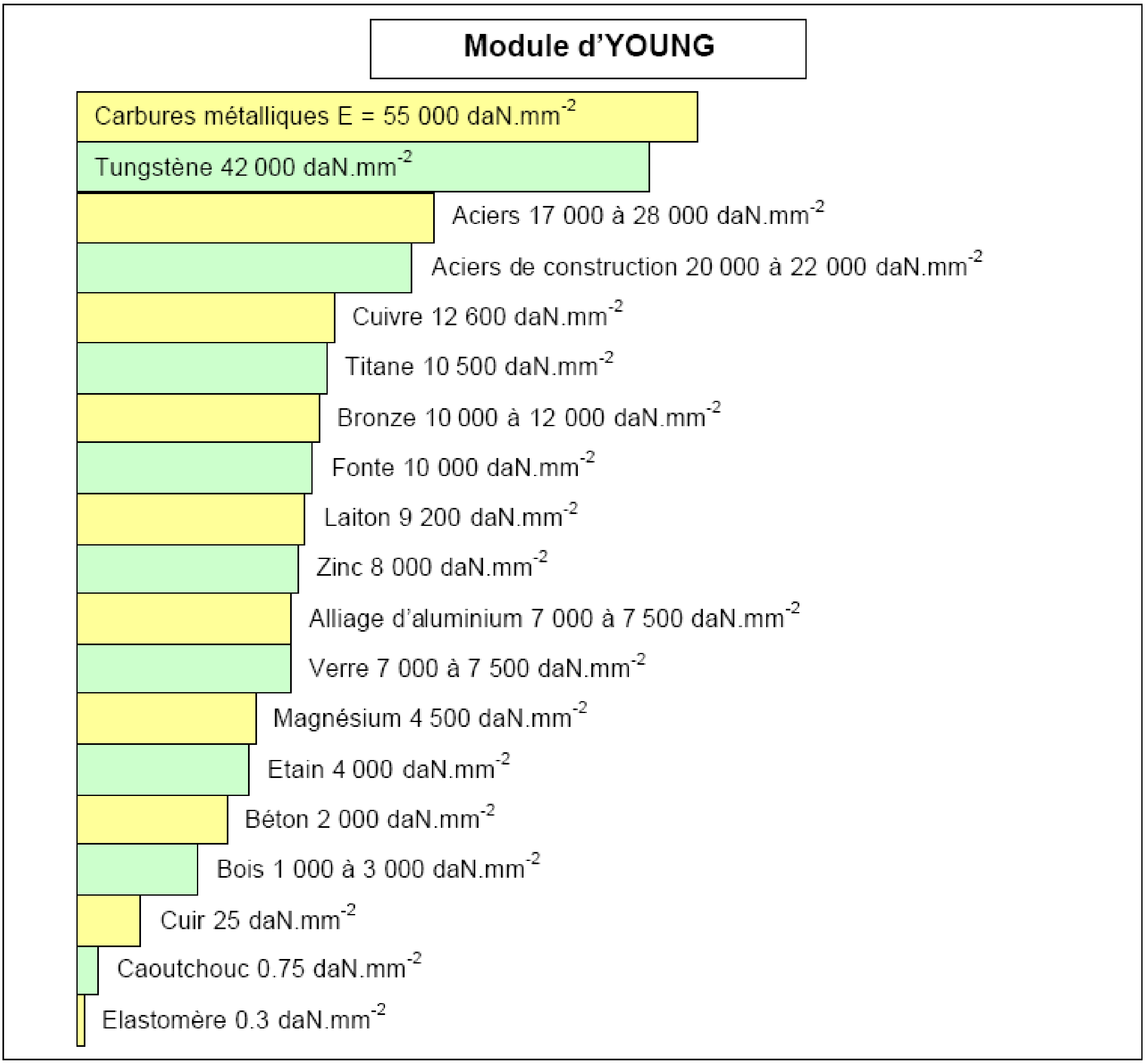
$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\sigma}{E} = \frac{100}{200\ 000} = 0.0005$$

$$\Delta L = \varepsilon \times L = 0.0005 \times 2\ 800 = 1.4\ mm$$

Essai de traction sur éprouvette

Exemples de valeurs de module d'Young

Voir tableau ci dessous.



Application 3.1. Une barre d'acier de 10 mm de diamètre reçoit une force de traction de 12560 N. Quelle sera l'allongement de la barre sur 5 mètres si $E = 210000\ N/mm^2$. Quelle sera alors la contrainte dans cette barre ?

Solution :

Recherche de la section de la barre :

$$A = \frac{\pi\, d^2}{4} = \frac{\pi \times 10^2}{4} = 78.54\ mm^2$$

L'allongement de la barre :

$$\Delta\, l = \frac{N\, l_0}{E\ A} = \frac{12\,560 \times 5000}{210\,000 \times 78.54} = 3.8\ mm$$

La contrainte sera égale à :

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{12\,560}{78.54} = 159.9\ N/mm^2 \approx 160\ N/mm^2$$

Application 3.2. Un barreau prismatique de section $A = 6\ cm^2$ et de longueur $l = 4\ m$, est soumis à une traction axiale de 123 kN. L'allongement total mesuré est de 4 mm. Trouver le module d'élasticité du matériau.

Solution :

Module d'élasticité

Nous le déterminerons au moyen de l'équation de l'allongement :

$$\Delta l = \frac{N\, l_0}{E\ A} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{N\, l_0}{\Delta l\ A} = \frac{123\,000 \times 4\,000}{4 \times 600} = 205\,000\ N/mm^2$$ C'est un acier.

Exercice 1.

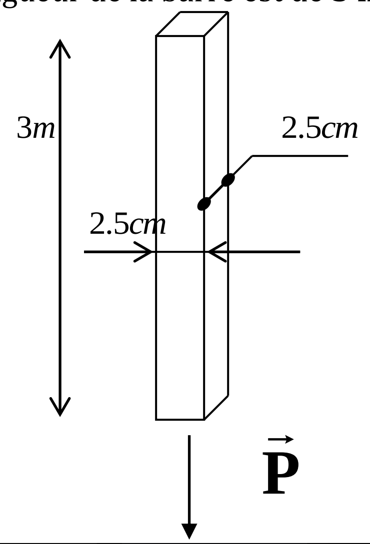
Une barre en acier verticale supporte une **charge de 25 kN**. La longueur de la barre est de **3 mètres**. Sa section est **carrée**, **pleine** de dimension **2.5cm x 2.5cm**.

La densité de l'acier est ρ_{acier}= 7600 kg/m³.

Le module d'élasticité de l'acier est E_S=200 000 Mpa.

On donne comme limite élastique f_s=400 Mpa.

Hypothèse : On néglige le poids propre de la poutre.



a) *Identifier* la sollicitation au quelle est soumise la barre.
b) *Calculer* la section de la poutre **[mm²]**.
c) *Calculer* la contrainte σ **[Mpa]**. en tout point de la poutre.
d) *Vérifier* que σ est inférieure à la limite élastique f_s **[Mpa]**.
e) *Calculer* l'allongement relatif ε.
f) *En déduire* la déformation Δl **[mm]** de la poutre.
g) *Calculer* la masse de la poutre **[kg]**.

Exercice 2.

Une poutre en béton verticale supporte une **charge de 25 kN**. La longueur de la barre est de **3 mètres**. Sa section est **carrée**, **pleine** de dimension **10cm x 10cm**.

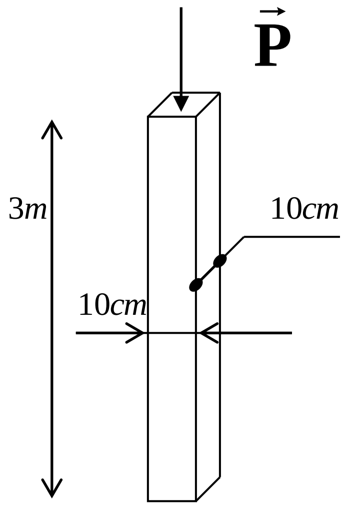
La densité du béton est $\rho_{béton}$= 2500 kg/m³.

Le module d'élasticité du béton est E_c=2 000 Mpa.

On donne comme limite élastique f_c=25 Mpa.

Hypothèse : On néglige le poids propre de la poutre.

a) *Identifier* la sollicitation au quelle est soumise la barre.
b) *Calculer* la section de la poutre **[mm²]**.
c) *Calculer* la contrainte σ **[Mpa]**. en tout point de la poutre.
d) *Vérifier* que σ est inférieure à la limite élastique f_s **[Mpa]**.
e) *Calculer* l'allongement relatif ε.
f) *En déduire* la déformation Δl **[mm]** de la poutre.
g) *Calculer* la masse de la poutre **[kg]**.



Exercice 3.

Une barre aluminium écroui dur H18 verticale supporte une **charge de 25 kN**. La longueur de la barre est de **3 mètres**. Sa section est **carrée**, **pleine** de dimension **4cm x 4**.

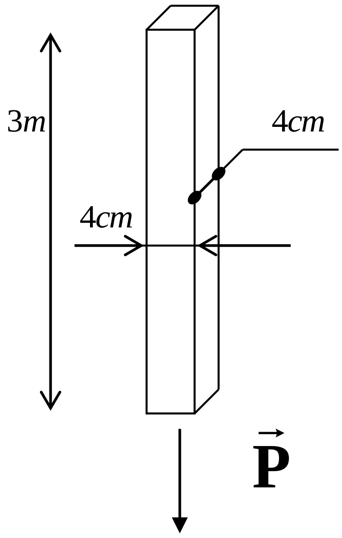
La densité de l'acier est $\rho_{aluminium}$= 2700 kg/m³.

Le module d'élasticité de l'acier est E_S=7 500 Mpa.

On donne comme limite élastique f_s=165 Mpa.

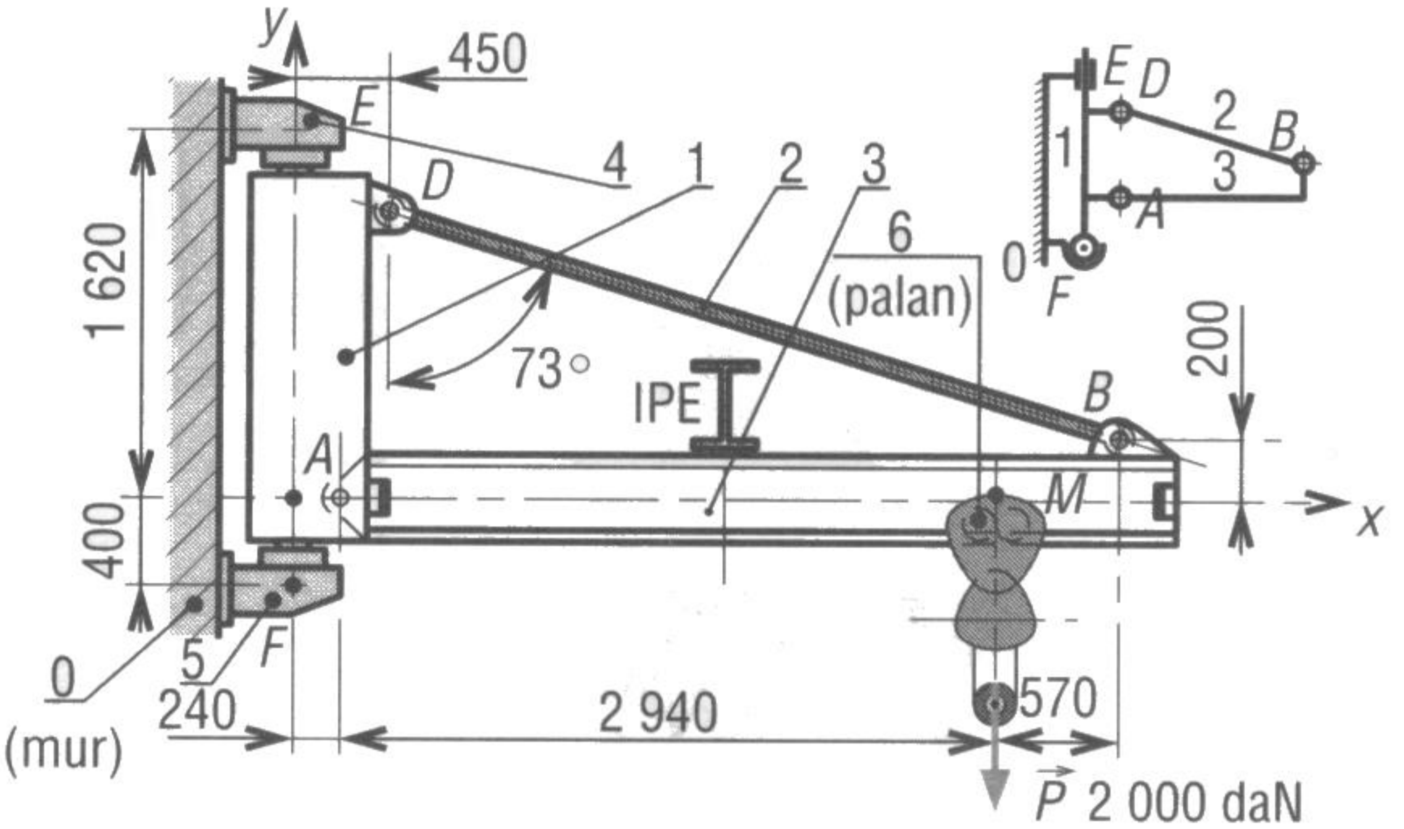
Hypothèse : On néglige le poids propre de la poutre.

a) *Identifier* la sollicitation au quelle est soumise la barre.
b) *Calculer* la section de la poutre **[mm²]**.
c) *Calculer* la contrainte σ **[Mpa]**. en tout point de la poutre.
d) *Vérifier* que σ est inférieure à la limite élastique f_s **[Mpa]**.
e) *Calculer* l'allongement relatif ε.
f) *En déduire* la déformation Δl **[mm]** de la poutre.
g) *Calculer* la masse de la poutre **[kg]**.



Exercice 4.

Une potence utilisée en manutention se compose d'une flèche (3) articulée en A sur une colonne pivotante (1) et d'un tirant BD ou (2) articulé en D sur (1) et en B sur (3). L'ensemble est en liaison pivot (axe vertical EF) sur des supports (4) et (5) encastrés dans le mur (0). Les poids des solides sont négligés, P (2 000 daN) schématise le poids de la charge à lever.



1. *Déterminer* graphiquement l'effort auquel est soumis le tirant 2.
Le tirant **2** est barre en acier, de section **ronde**, **pleine** de dimension **∅2.5cm**. La densité de l'acier est ρ_{acier}= 7600 kg/m³. Le module d'élasticité de l'acier est E_S=200 000 Mpa. On donne comme limite élastique f_s=400 Mpa.

2. Identifier la sollicitation au quelle est soumis le tirant 2. ***Calculer*** sa section S. ***Calculer*** la contrainte normale.

3. Calculer la longueur DB. ***Calculer*** l'allongement relatif. ***Calculer*** l'allongement absolu en mm.

4. Vérifier que les caractéristiques sont compatibles avec les caractéristiques du matériau.

Exercice 5.

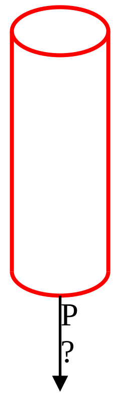
Un fer rond doux - Fe E 215 - de ∅10 mm travail en traction. Le coefficient de sécurité est *s*=5.

Caractéristiques de l'acier :

Densité ρ_{acier}= 7600 kg/m^3.	Module d'élasticité E_S=200 000 Mpa.	Limite élastique f_s=215 Mpa.

On *cherche* la charge maximale que ce fer est capable de supporter.

1.Ecrire la condition que doit respecter ce fer sous forme d'une inégalité.
2.Calculer S, puis σ.
3.En déduire F_{Max}.



La charge à supporter est de 300daN.

4.Combien faut-il de fer ?
5.Calculer $\sigma_{réel}$.

La longueur des barres étant de 1m, *en déduire* l'allongement relatif, puis absolu.

Exercice 6.

Un bâtiment est construit avec des poutres métalliques porteuses **IPE200**. La hauteur sous plafond du RDC est de **2m80**. La charge supportée par les poutres du RDC est de **45 000 daN**. Le coefficient de sécurité est ***s*=10**.

Densité ρ_{acier}= 7600 kg/m^3.	Module d'élasticité E_S=200 000 Mpa.	Limite élastique f_s=215 Mpa.

Le critère de dimensionnement prépondérant est la fissuration. On veut donc un **Δl < 1mm.**

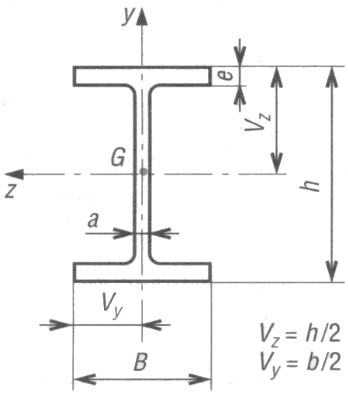
1) *Calculer* la charge maximale F_{IPE} que peut supporter une poutre pour satisfaire le critère de dimensionnement.

Méthode

1. Calculer ε pour Δl=1mm.	*2. Calculer* σ.	*3. En déduire* F_{IPE}.

2) *Déterminer* le nombre de poutre nécessaires pour supporter la charge donnée.
3) *Vérifier* que la contrainte réelle est inférieure à la contrainte maximale.
4) *Recalculer* le *Δl* réel.

Moments quadratiques des profilés usuels	profil	Dimensions h (mm)	b (mm)	a (mm)	e (mm)	Section S (cm^2)	masse kg.m^{-1}	Moments quadratiques I_y (cm^4)	I_y/V_y (cm^3)	I_z (cm^4)	I_z/V_z (cm^3)	V_z (mm)
I P E	80	80	46	3,8	5,2	7,64	6,0	80,1	20,0	8,49	3,69	
	100	100	55	4,1	5,7	10,3	8,1	171	34,2	15,9	5,79	
	120	120	64	4,4	6,3	13,2	10,4	318	53,0	27,7	8,65	
	140	140	73	4,7	6,9	16,4	12,9	541	77,3	44,9	12,3	
	160	160	82	5,0	7,4	20,1	15,8	869	109	68,3	16,7	
	180	180	91	5,3	8,0	23,9	18,8	1 317	146	101,0	22,2	
	200	200	100	5,6	8,5	28,5	22,4	1 943	194	142,0	28,5	
	220	220	110	5,9	9,2	33,4	26,2	2 772	252	205,0	37,5	
	240	240	120	6,2	9,8	39,1	30,7	3 892	324	284,0	47,3	
	270	270	135	6,6	10,2	45,9	36,1	5 790	429	420,0	62,2	
	300	300	150	7,1	10,7	53,8	42,2	8 356	557	604,0	80,5	
	330	330	160	7,5	11,5	62,6	19,1	1 1770	713	788,0	98,5	
	360	360	170	8,0	12,7	72,7	57,1	16 270	904	1 043,0	123,0	
	400	400	180	8,6	13,5	84,5	66,3	23 130	1160	1 318,0	146,0	
	450	450	190	9,4	14,6	98,8	77,6	33 740	1500	1 676,0	176,0	
	500	500	200	10,2	16,0	116,0	90,7	48 200	1930	2 142,0	214,0	
	550	550	210	11,1	17,2	134,0	106,0	67 120	2440	2 667,0	254,0	
	600	600	220	12,0	19,0	156,0	122,0	92 080	3070	3 387,0	308,0	
I P E R	140	142	72	5,3	7,8	18,3	14,4	611	86	48,7	13,5	
	160	162	81	5,6	8,5	22,6	17,7	988	122	75,6	18,7	
	180	183	89	6,4	9,5	28,0	22,0	1 554	170	112	25,2	
	200	204	98	6,6	10,5	33,9	26,6	2 363	232	166	33,8	
	220	225	108	6,7	11,8	40,2	231,6	3 474	309	249	46,0	
	240	245	118	7,5	12,3	47,5	37,3	4 823	394	339	57,4	
	270	276	133	7,7	13,1	55,9	43,9	7 312	530	516	77,6	
	300	306	147	8,5	13,7	65,9	51,7	10 499	686	728	99,1	
	330	336	158	9,2	14,5	76,8	60,3	14 688	874	958	121,0	
	360	366	168	9,9	16,0	89,6	70,3	20 288	1 109	1270	151,0	
	400	407	178	10,6	17,0	104,0	81,5	28 862	1 418	1606	180,0	
	450	458	188	11,3	18,6	121,0	95,2	42 395	1 851	2069	220,0	
	500	508	198	12,6	20,0	142,0	111,0	59 932	2 360	2600	263,0	
	550	560	210	14,0	22,2	170,0	137,7	86 579	3 092	3447	328,0	
	600	608	218	14,0	23,0	185,0	144,4	110 307	3 628	3992	366,0	



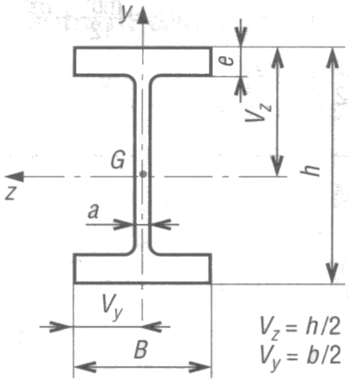


Tableau IPE / IPER